ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ЛИНЕЙНЫХ НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Следует напомнить основные определения, относящиеся к линейным нормированным пространствам и привести примеры нормированных пространств, с которыми в дальнейшем предстоит работать.

Линейное пространство X называют нормированным пространством, если каждому элементу $x \in X$ поставлено в соответствие неотрицательное число $\|x\|$ (норма x), для которого выполнены следующие аксиомы:

1) для любого x: $\|x\| \geq 0$; $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$; 3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Линейное нормированное пространство называется полным, если в нем всякая фундаментальная последовательность сходится. Полное нормированное пространство – банаховое.

Унитарное пространство H называется гильбертовым, если оно полно в норме, порожденной скалярным произведением этого пространства.

Примеры линейных нормированных пространств

1. Пространство $C(\overline{G})$ – пространство непрерывных функций, заданных в $\overline{G}$ с нормой $\|x(t)\| = \max\limits_{t \in \overline{G}} |x(t)|$. Справедливость аксиом 1)–3) без труда проверяется.

2. $RL_2(G)$ – унитарное пространство интегрируемых по Риману в G функций со скалярным произведением

$$(x, y) = \int\limits_G x(t)\overline{y}(t)\,dt,$$

становится нормированным, если норму в нем определить равенством $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.

3. ***Пространство $C^{(m)}(\overline{G})$.*** Элементами этого пространства являются всевозможные функции, определенные в $\overline{G}$ и имеющие в $\overline{G}$ непрерывные производные до m-й включительно. Операции

сложения функций и умножения функции на число определяются обычным образом. Норма элемента $x(t) \in C^{(m)}(\overline{G})$ находится по формуле

$$\|x\| = \sum_{k=0}^{m} \max_{t \in \overline{G}} \left| x^{(k)}(t) \right|.$$

4. ***Гильбертовое пространство*** $\boldsymbol{L_2(G)}$ определяется как пополнение пространства $RL_2(G)$ по норме, порожденной скалярным произведением в пространстве $RL_2(G)$.

5. ***Пространство ограниченных числовых последовательностей.*** Пусть X – множество ограниченных числовых последовательностей $x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...)$. Это означает, что для любого $x \in X$ существует такая постоянная M, зависящая только от x, что $|\xi_i| \le M$ для всех i.

Введем норму в этом пространстве равенством $\|x\| = \sup\limits_i |\xi_i|$. Она, очевидно, удовлетворяет всем аксиомам нормы. Действительно, проверки требует лишь аксиома треугольника. Имеем (если $x = \{\xi_i\}$, $y = \{\eta_i\}$)

$$|\xi_i - \eta_i| \le |\xi_i - \mu_i| + |\mu_i - \eta_i| \le \sup_i |\xi_i - \mu_i| + \sup_i |\mu_i - \eta_i| =$$
$$= \|x - z\| + \|z - y\|.$$

Следовательно, и $\sup\limits_i |\xi_i - \eta_i| = \|x - y\| \le \|x - z\| + \|z - y\|$.

Полученное нормированные пространство называют пространством m ограниченных числовых последовательностей.

Замечание 7. Сходимость в пространстве m есть сходимость по координатам, равномерная относительно номеров координат.

6. ***Пространство числовых*** последовательностей l_2 (иначе координатное гильбертовое пространство). Элементами этого пространства служат последовательности чисел (действительных или комплексных)

$$x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...),$$

удовлетворяющих условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 < \infty.$$

Это пространство – гильбертовое со скалярным произведением

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y}_i .$$

Аксиомы скалярного произведения здесь проверяются непосредственно.

Пусть X и Y – нормированные пространства и D подмножество в X, $D \subset X$. Если каждому элементу $x \in D$ поставлен в соответствие по некоторому правилу (закону) некоторый (вполне определенный) элемент $Ax = y \in Y$, то говорят, что задан оператор A, действующий из X в Y с областью определения $D = D(A)$. Совокупность всех элементов $Ax \in Y$, которые получаются, когда x пробегает D, называется областью значений, или образом оператора A (обозначается $\operatorname{Im} A$).

Оператор A, действующий из X в Y, – линейный, если:

а) область определения $D(A)$ оператора A – линейное множество, т.е. из того, что $x, y \in D(A)$ следует, что $\alpha x + \beta y \in D(A)$ (α, β – произвольные числа);

б) $A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$.

В дальнейшем мы будем рассматривать линейные операторы, определенные на всем пространстве X (т.е. $D(A) = X$).

Число $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|_x = 1} \|Ax\|_Y$ – норма линейного оператора A.

Линейный оператора $A: X \to Y$ называют ограниченным, если его норма $\|A\|$ конечна.

Оператор A, действующий из X в Y, называют непрерывным, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что каковы бы ни были элементы x, $y \in X$, из условия $\|x - y\|_x < \delta$ следует, что $\|Ax - Ay\|_Y < \varepsilon$.

Между ограниченностью и непрерывностью линейного оператора существует тесная связь, а именно справедливо утверждение 1.

Утверждение 1. Линейный оператор A, действующий из X в Y (X и Y – линейные нормированные пространства), непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен.

Пусть H – унитарное или гильбертово пространство, и A – линейный оператор, действующий из H в H. Тогда оператор A называют самосопряженным (или эрмитовым), если для любых $x,\ y \in H$ справедливо соотношение

$$(Ax,\ y) = (x,\ Ay).$$

Теорема 6 (о норме самосопряженного оператора). Если A – линейный самосопряженный оператор, действующий в унитарном или гильбертовом пространстве H, то норма оператора A равна

$$\|A\| = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in H}} |(Ax,\ x)|.$$

Собственные числа и собственные векторы оператора

Пусть A – линейный оператор, действующий в нормированном пространстве X.

Число $\lambda \in \mathrm{C}$ – собственное значение оператора A в X, если существует нетривиальное решение x уравнения

$$Ax = \lambda x.$$

Само это решение $x \in X$ – собственный элемент (сабственный вектор), отвечающий собственному значению λ.

Наибольшее число линейно независимых элементов, соответствующих собственному значению λ, называют кратностью данного собственного значения λ.

Величина, обратная собственному значению λ (если $\lambda \neq 0$) есть характеристическое значение (число) оператора A. Таким образом, характеристическое число оператора A есть число μ, для которого уравнение $x = \mu Ax$ имеет нетривиальное решение x.

Пример 1.11. Найти характеристические числа и собственные функции однородного интегрального уравнения с симметричным ядром

$$x(t) = \lambda \int_0^{\pi} \mathrm{K}(t,\ s)\, x(s)\, ds,$$

где $$\mathrm{K}(t, s) = \begin{cases} \sin t \cos s, & 0 \le t \le s; \\ \sin s \cos t, & s \le t \le \pi. \end{cases}$$

Решение. Заданное интегральное уравнение запишем в виде

$$x(t) = \lambda \int_0^t \sin s \cos t \cdot x(s)\, ds + \lambda \int_t^\pi \sin t \cos s \cdot x(s)\, ds. \qquad (27)$$

Дифференцируя это равенство по t, получим

$$x'(t) = -\lambda \sin t \int_0^t \sin s \cdot x(s)\, ds + \lambda \cos t \int_t^\pi \cos s \cdot x(s)\, ds. \qquad (28)$$

Продифференцируем это равенство еще раз по t, найдем

$$x''(t) = -\lambda \cos t \int_0^t \sin s \cdot x(s)\, ds - \lambda \sin^2 t \cdot x(t) -$$

$$-\lambda \cos^2 t x(t) - \lambda \sin t \int_t^\pi \cos s \cdot x(s)\, ds,$$

или в силу равенства (27)

$$x''(t) = -x(t) - \lambda x(t).$$

Итак, получаем, что $x(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$x''(t) + (\lambda + 1)x = 0. \qquad (29)$$

Из (27) и (28) очевидно имеем

$$\begin{cases} x(0) = 0; \\ x'(\pi) = 0. \end{cases} \qquad (30)$$

Общее решение уравнения (29) при $\lambda = -1$ имеет вид

$$x(t) = at + b.$$

Отсюда следует, что при $\lambda = -1$ уравнение (29) имеет только тривиальное решение, удовлетворяющее краевым условиям (30). Следовательно, $\lambda = -1$ не является характеристическим числом заданного уравнения.

Рассмотрим $\lambda > -1$. Тогда общее решение уравнения (29) имеет вид

$$x(t) = C_1 \sin\left(\sqrt{\lambda + 1}\right)t + C_2 \cos\left(\sqrt{\lambda + 1}\right)t.$$

В силу краевых условий (30) для определения постоянных C_1 и C_2 получим систему

$$\begin{cases} C_2 = 0; \\ C_1 = \sqrt{\lambda+1}\cos\sqrt{\lambda+1}\pi - C_2\sqrt{\lambda+1}\sin\sqrt{\lambda+1}\pi = 0, \end{cases}$$

или отсюда имеем $C_2 = 0,\ \sqrt{\lambda+1} = \text{K} + \frac{1}{2},\ \ \text{K} = 0, 1, 2, \dots$.

Следовательно, характеристическими значениями заданного интегрального уравнения являются числа

$$\lambda_{\text{K}} = \left(\text{K} + \frac{1}{2}\right)^2 - 1, \quad \text{K} = 0, 1, 2, \dots,$$

а соответствующие им собственные функции имеют вид

$$x_{\text{K}}(t) = \sin\left(\text{K} + \frac{1}{2}\right)t.$$

Пусть $\lambda < -1$. Тогда общее решение уравнения (29) имеет вид

$$x(t) = C_1 e^{\left(\sqrt{-(\lambda+1)}\right)t} + C_2 e^{-\left(\sqrt{-(\lambda+1)}\right)t}.$$

В силу краевых условий (30) для нахождения постоянных C_1 и C_2 получаем систему

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0; \\ C_1\sqrt{-(\lambda+1)}e^{\left(\sqrt{-(\lambda+1)}\right)\pi} - C_2\sqrt{-(\lambda+1)}e^{-\left(\sqrt{-(\lambda+1)}\right)\pi} = 0. \end{cases}$$

Очевидно, что эта система имеет единственное решение $C_1 = C_2 = 0$. Следовательно, при $\lambda < -1$ заданное интегральное уравнение не имеет характеристических чисел и собственных функций.

Пример 1.12. Найти характеристические числа и собственные функции однородного интегрального уравнения с симметричным ядром

$$x(t) = \lambda\int_0^1 e^{-|t-s|}\cdot x(s)\,ds, \quad 0 \le t \le 1.$$

Решение. Запишем заданное интегральное уравнение в виде

$$x(t) = \lambda\int_0^t e^{s-t}\cdot x(s)\,ds + \lambda\int_t^1 e^{t-s}\cdot x(s)\,ds. \qquad (31)$$

Продифференцируем это равенство по t:

$$x'(t) = -\lambda \int_0^t e^{s-t} \cdot x(s)\,ds + \lambda \int_t^1 e^{t-s} \cdot x(s)\,ds. \qquad (32)$$

Дифференцируя это равенство еще раз по t, получим

$$x''(t) = \lambda \int_0^t e^{s-t} \cdot x(s)\,ds + \lambda \int_t^1 e^{t-s} \cdot x(s)\,ds - 2\lambda x(t),$$

или в силу (31) имеем

$$x''(t) + (2\lambda - 1)x(t) = 0. \qquad (33)$$

Пользуясь (31) и (32) нетрудно заметить, что

$$\begin{cases} x(0) - x'(0) = 0; \\ x(1) + x'(1) = 0. \end{cases} \qquad (34)$$

Итак, задача о нахождении характеристических чисел и собственных функций заданного интегрального уравнения эквивалентна нахождению собственных чисел и собственных функций краевой задачи (33), (34). Для решения последней задачи рассмотрим несколько случаев.

1. $\lambda = \dfrac{1}{2}$. Тогда общее решение уравнения (33) имеет вид $x(t) = C_1 t + C_2$. Из краевых условий (34) получаем $C_1 = C_2 = 0$.

Следовательно, $\lambda = \dfrac{1}{2}$ не является характеристическим числом заданного интегрального уравнения.

2. $2\lambda - 1 < 0$. Введем обозначение $\mu^2 = 1 - 2\lambda$ $(\mu > 0)$. Тогда общее решение уравнения (33) имеет вид

$$x(t) = C_1 e^{\mu t} + C_2 e^{-\mu t}.$$

Из краевых условий (34) для нахождения постоянных C_1 и C_2 получим систему

$$\begin{cases} C_1(1-\mu) + C_2(1+\mu) = 0; \\ C_1 e^{\mu}(1+\mu) + C_2 e^{-\mu}(1-\mu) = 0. \end{cases}$$

Определитель Δ этой системы равен

$$\Delta = e^{-\mu}(1-\mu)^2 - e^{\mu}(1+\mu)^2.$$

Этот определитель при наших μ очевидно не обращается в нуль (так как правая часть равенства $\left(\frac{1-\mu}{1+\mu}\right)^2 = e^{2\mu}$ больше единицы, а левая – меньше). Следовательно, при $\lambda < \frac{1}{2}$ нет характеристических чисел у заданного интегрального уравнения.

3. $2\lambda - 1 > 0$. Введем обозначение $\mu^2 = 2\lambda - 1$ $(\mu > 0)$. Тогда общее решение уравнения (33) имеет вид

$$x(t) = C_1 \sin \mu t + C_2 \cos \mu t.$$

Из краевых условий (34) для нахождения постоянных C_1 и C_2 получаем систему

$$\begin{cases} -C_1\mu + C_2 = 0; \\ C_1(\sin\mu + \mu\cos\mu) + C_2(\cos\mu - \mu\sin\mu) = 0. \end{cases}$$

Определитель этой системы Δ равен

$$\Delta = -2\mu\cos\mu + \left(\mu^2 - 1\right)\sin\mu.$$

В точках μ_K, являющихся корнями уравнения

$$\operatorname{ctg}\mu = \frac{\mu^2 - 1}{2\mu}, \tag{35}$$

этот определитель обращается в нуль и, следовательно, все числа $\lambda_K = \frac{1+\mu_K^2}{2}$, $K = 1, 2, \ldots$, где μ_K являются корнями уравнения (35), будут характеристическими числами заданного интегрального уравнения. Собственными функциями, отвечающими заданному λ_K, будут

$$x_K(t) = \sin\mu_K t + \mu_K \cos\mu_K t.$$

Пример 1.13. Решить неоднородное интегральное уравнение с симметричным ядром

$$x(t) = \lambda\int_0^1 K(t, s)\,x(s)\,ds + \operatorname{ch} t,$$

где $$\mathrm{K}(t, s)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{ch} t\cdot\operatorname{ch}(s-1)}{\operatorname{sh} 1}, & 0\le t\le s;\\ \dfrac{\operatorname{ch} s\cdot\operatorname{ch}(t-1)}{\operatorname{sh} 1}, & s\le t\le 1.\end{cases}$$

Решение. Запишем заданное интегральное уравнение в виде
$$x(t)=\lambda\int_0^t \frac{\operatorname{ch} s\cdot\operatorname{ch}(t-1)}{\operatorname{sh} 1}x(s)\,ds+\lambda\int_t^1 \frac{\operatorname{ch} t\cdot\operatorname{ch}(s-1)}{\operatorname{sh} 1}x(s)\,ds+\operatorname{ch} t. \quad (36)$$
Продифференцируем это равенство по t:
$$x'(t)=\lambda\int_0^t \frac{\operatorname{ch} s\cdot\operatorname{sh}(t-1)}{\operatorname{sh} 1}x(s)\,ds+\lambda\int_t^1 \frac{\operatorname{sh} t\cdot\operatorname{ch}(s-1)}{\operatorname{sh} 1}x(s)\,ds+\operatorname{sh} t. \quad (37)$$
Дифференцируя это равенство еще раз по t, получим
$$x''(t)=\lambda\int_0^t \frac{\operatorname{ch} s\cdot\operatorname{ch}(t-1)}{\operatorname{sh} 1}x(s)\,ds+\lambda\frac{\operatorname{ch} t\cdot\operatorname{sh}(t-1)}{\operatorname{sh} 1}x(t)+$$
$$+\lambda\int_t^1 \frac{\operatorname{ch} t\cdot\operatorname{ch}(s-1)}{\operatorname{sh} 1}x(s)\,ds-\lambda\frac{\operatorname{sh} t\cdot\operatorname{ch}(t-1)}{\operatorname{sh} 1}x(t)+\operatorname{ch} t.$$
В силу (36) после элементарных преобразований это равенство приводится к виду
$$x''(t)+(\lambda-1)x(t)=0. \quad (38)$$

Из (37) нетрудно заметить, что $x(t)$ удовлетворяет следующим краевым условиям
$$x'(0)=0, \qquad x'(1)=\operatorname{sh} 1. \quad (39)$$
Таким образом, искомое решение интегрального уравнения является решением краевой задачи (38), (39).

Рассмотрим следующие случаи.

1. $\lambda=1$. Тогда общее решение уравнения (38) имеет вид
$$x(t)=C_1t+C_2.$$
Учитывая краевые условия (39) для нахождения постоянных C_1 и C_2, получим несовместную систему
$$\begin{cases}C_1=0;\\ C_1=\operatorname{sh} 1.\end{cases}$$

Следовательно, при $\lambda = 1$ заданное интегральное уравнение не имеет решений.

2. $\lambda - 1 < 0$. Введем обозначение $\mu^2 = 1 - \lambda$ $(\mu > 0)$. Тогда общее решение уравнения (38) имеет вид

$$x(t) = C_1 e^{\mu t} + C_2 e^{-\mu t}.$$

Из краевых условий (39) для нахождения постоянных C_1 и C_2 получим систему

$$\begin{cases} C_1 - C_2 = 0; \\ C_1 \mu e^{\mu} - C_2 \mu e^{-\mu} = \operatorname{sh} 1, \end{cases}$$

решение которой имеет вид

$$C_1 = C_2 = \frac{\operatorname{sh} 1}{2\mu \operatorname{sh} \mu}.$$

Следовательно, искомое решение заданного интегрального уравнения имеет в этом случае вид

$$x(t) = \frac{\operatorname{sh} 1}{2\mu \operatorname{sh} \mu}\left(e^{\mu t} + e^{-\mu t}\right) = \frac{\operatorname{sh} 1 \cdot \operatorname{ch} \mu t}{\mu \operatorname{sh} \mu}, \quad \text{где} \quad \mu = \sqrt{1 - \lambda}.$$

3. $\lambda - 1 > 0$. Введем обозначение $\mu^2 = \lambda - 1$ $(\mu > 0)$. Тогда общее решение уравнения (38) имеет вид

$$x(t) = C_1 \sin \mu t + C_2 \cos \mu t.$$

Из краевых условий (39) для нахождения постоянных C_1 и C_2 получим систему

$$\begin{cases} C_1 = 0; \\ C_1 \mu \cos \mu - C_2 \mu \sin \mu = \operatorname{sh} 1, \end{cases}$$

решением которой будет $C_1 = 0$, $C_2 = -\dfrac{\operatorname{sh} 1}{\mu \sin \mu}$.

Следовательно, искомое решение заданного интегрального уравнения имеет в этом случае вид

$$x(t) = -\frac{\operatorname{sh} 1 \cos \mu t}{\mu \sin \mu}, \quad \text{где} \quad \mu = \sqrt{\lambda - 1}.$$

Замечание 8. При $\lambda = 1$ заданное интегральное уравнение не имеет решения, так как правая часть $\operatorname{ch} t$ не ортогональна к решениям однородного интегрального уравнения (ядро $\mathrm{K}(t, s)$ интегрального уравнения симметрично, следовательно, однородное сопряженное уравнение совпадает с однородным уравнением, соответствующим заданному неоднородному уравнению). Решениями однородного уравнения при $\lambda = 1$ являются $x(t) = C$, $C = \text{const}$.